TD n° 8 : Déterminants

Exercice 1. Calculer le déterminant de la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & 0 & 1 & -1 \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. *Forme factorisée*
Soient a, b, $c \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant en donnant un résultat sous forme factorisée.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} b+a & b-a-c & b \\ -c & 2a & 2a \\ 2c & 2c & c-a \end{vmatrix} \qquad D_4 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 3. *Test d'inversibilité*
Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$M_a = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} \qquad N_a = \begin{pmatrix} 0 & a & a & a^2-a \\ 1 & a-1 & 2a-1 & a^2-a \\ 0 & a & a & 0 \\ 1 & a & 3a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. *Un déterminant tridiagonal*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le déterminant de taille n :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

1. Calculer Δ_1, Δ_2 et Δ_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.
3. En déduire Δ_4 et Δ_5.
4. Conjecturer une expression pour Δ_n puis la démontrer.

Exercice 5. ★ *Déterminant de Vandermonde*
Soient $n \geqslant 2$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. On définit le déterminant de taille n :

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & {a_1}^2 & \dots & {a_1}^{n-1} \\ 1 & a_2 & {a_2}^2 & \dots & {a_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & {a_n}^2 & \dots & {a_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. Quelle est la valeur de ce déterminant si les a_i ne sont pas deux à deux distincts ?
2. On suppose désormais les a_i deux à deux distincts. Pour tout réel x, on pose $P(x) = V_n(a_1, \dots, a_{n-1}, x)$.
   a) Montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.
   b) Quelles sont les racines du polynôme P ? Quel est son coefficient dominant ?
   c) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$P(x) = V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (x - a_k).$$
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 2$,
$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Exercice 6. ★ *Via une relation polynomiale*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 3A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_n$. Calculer $\det(A - \mathrm{I}_n)$.

Exercice 7. ★

1. Montrer par récurrence sur n que si les coefficients de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient $\forall j \in [\![1\,;n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \leqslant 1$ alors $|\det(A)| \leqslant 1$.
2. En déduire pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'inégalité

$$|\det(A)| \leqslant \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right).$$

Exercice 8.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que si n est impair alors M n'est pas inversible. Le résultat demeure-t-il valable pour n pair ?

Exercice 9. *Un peu de géométrie*
Soient $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ trois points du plan tels que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = 0$. Montrer que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 10. *Base*
Déterminer les réels t tels que la famille $\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11. *Base ?*
À quelle condition sur les réels a, b et c, la famille $\big((X-a)^2,\ (X-b)^2,\ (X-c)^2\big)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 12. *Déterminant d'un endomorphisme*

1. Dans chaque cas, calculer le déterminant de $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et déterminer si u est un isomorphisme.
   a) $u(x, y, z) = (x + y + z,\ x + z,\ y + z)$
   b) $u(x, y, z) = (x - y,\ y - z,\ z - x)$
2. Mêmes questions avec $v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$.
   a) $v(P) = P + P'$
   b) $v(P) = P(X + 1) - P(X)$
   c) $v(P) = XP' + P(3)$

Exercice 13. *Trace et déterminant*
On considère une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ainsi que l'application φ définie par $\varphi(M) = AM$ pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Exprimer le déterminant et la trace de φ en fonction du déterminant et de la trace de A.
4. En déduire que φ est un isomorphisme si et seulement si A est inversible.

Exercice 14. ★ *Endomorphisme de rang 1*
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que toutes les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ sauf la dernière soient nulles.
2. En déduire que $\det(u + \mathrm{id}_E) = 1 + \mathrm{Tr}(u)$.